

УДК 620.178.3:519.6

DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-42-68

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ
МОДЕРНІЗОВАНОГО РІВНЯННЯ ВЕЙБУЛЛА

А.В. Конопльов

д.т.н., професор, завідувач кафедри «Машинознавство та інженерна механіка»

ORCID ID: 0009-0009-9775-6018

e-mail: avkonmu@gmail.com

Ю.О. Григор'єв

к.ф.-м.н., доцент кафедри «Математика, фізика та астрономія»

ORCID ID: 0000-0002-7114-834x

e-mail: yurii.grigoryev@gmail.com

Л.І. Кусік

к.ф.-м.н., доцент кафедри «Математика, фізика та астрономія»

ORCID ID: 0000-0003-1358-9566

e-mail: lk09032017@gmail.com

Одеський національний морський університет, Одеса, Україна

Анотація. *Результати випробувань на опір втомі описують різними рівняннями, найбільш поширеними з яких є степеневе рівняння, показникове рівняння та рівняння Вейбулла. Вибір кожного з них залежить від конкретного розв'язуваного завдання. Найчастіше віддають перевагу двопараметричним рівнянням – степеневому і показниковому, як найпростішим і найуніверсальнішим.*

Для вибору того чи іншого рівняння необхідно встановити критерій, або групу критеріїв, за допомогою яких можна було б обґрунтувати прийняте рішення. Одним із таких очевидних критеріїв є коефіцієнт кореляції. Результати численних експериментів свідчать про те, що він практично однаковий для степеневі та показникової моделей кривої втомі, а для рівняння Вейбулла, у його канонічному вигляді, як правило, незначно менший.

У роботі вирішено завдання підвищення коефіцієнта кореляції рівняння Вейбулла за рахунок заміни одного з параметрів (границі витривалості) на змінну величину. Необхідний результат було досягнуто за рахунок варіювання трьох величин цього рівняння при побудові кривої втомі за допомогою метода найменших квадратів. Обчислення проводили в програмі Excel, а також у системі комп'ютерної математики Matha.

Ключові слова: *метод найменших квадратів, рівняння Вейбулла, крива втомі, система комп'ютерної математики Matha, метод Ньютона розв'язання системи рівнянь.*

UDC 620.178.3:519.6

DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-42-68

CALCULATION OF PARAMETERS OF THE MODERNIZED WEIBULL EQUATION

A.V. Konoplev

Doctor of Technical Sciences,
Professor, Head of the Department of Mechanical Engineering and Mechanical Engineering
ORCID ID: 0009-0009-9775-6018
e-mail: avkonmu@gmail.com

Hryhoriev Yu.O.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Astronomy
ORCID ID: 0000-0002-7114-834x
e-mail: yurii.grigoryev@gmail.com

Kusik L.I.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Astronomy
ORCID ID: 0000-0003-1358-9566
e-mail: lk09032017@gmail.com

Odesa National Maritime University, Odesa, Ukraine

Abstract. *The results of fatigue resistance tests are described by various equations, the most common of which are the power law equation, the exponential equation, and the Weibull equation. The choice of each of them depends on the specific task at hand. Most often, two-parameter equations are preferred - the power and exponential equations – as they are the simplest and most versatile.*

To select a particular equation, it is necessary to establish a criterion, or a group of criteria, which could be used to justify the decision. One such obvious criterion is the correlation coefficient. The results of numerous experiments indicate that it is practically the same for the power law and exponential models of the fatigue curve, and for the Weibull equation, in its canonical form, it is usually slightly lower.

The paper solves the problem of increasing the correlation coefficient of the Weibull equation by replacing one of the parameters (endurance limit) with a variable value. The required result was achieved by varying the three values of this equation when constructing a fatigue curve using the least squares method. Calculations were performed in Excel and the Maxima computer mathematics system.

Keywords: *least-squares method, Weibull's equation, fatigue curve, Maxima computer mathematics system, Newton's method for solving a system of equations.*

Вступ. Найбільш поширеними функціями, що виступають у якості математичних моделей кривих втоми, є степенева та показова, дещо рідше – рівняння Вейбулла. На відміну від перших двох рівняння Вейбулла містить три параметри і в загальному випадку записується у вигляді [1].

$$(\sigma - \sigma_R)^{m_W} \cdot (N + B) = 10^{C_W}.$$

де σ і N – поточні напруги і число циклів до руйнування відповідно; m_W , C_W і B параметри.

Степеневе рівняння можна вважати окремим випадком рівняння Вейбулла, в якому границя витривалості σ_R і параметр B прийняті рівними нулю. При цьому параметри m_W і C_W у числовому виразі стають іншими [2].

$$\sigma^{m_C} \cdot N = \sigma_R^{m_C} \cdot N_{GC} = \sigma_{dC}^{m_C} = 10^{C_C},$$

де m_C , C_C і – параметри; N_{GC} – довговічність, що відповідає границі витривалості; σ_{dC} – початкова ордината.

Досвід використання наведених залежностей свідчить про хорошу їх відповідність експериментальним даним. Однак, незважаючи на досить високі коефіцієнти кореляції, їх можна підвищити за рахунок введення до цих рівнянь додаткових параметрів.

Розглянемо розв'язання цієї задачі стосовно рівняння Вейбулла. У цьому рівнянні параметр B приймає значення в межах від 0 до $5 \cdot 10^4$ циклів [1]. У зв'язку з цим його не враховують при обробці результатів втомних випробувань, якщо мінімальна довговічність перевищує 10^5 циклів. Таким чином, при випробуваннях на багатоциклової втому це рівняння записують у вигляді

$$(\sigma - \sigma_R)^{m_W} \cdot N = 10^{C_W}.$$

Границя витривалості σ_R , як і параметри m'_W и C'_W визначають положення похилої ділянки кривої втоми. При заміні σ_R на деяку змінну величину A можна отримати інше рівняння, відповідно з іншим коефіцієнтом кореляції.

$$(\sigma - A)^{m_W} \cdot N = 10^{C_W}. \quad (1)$$

Визначимо, якою мірою заміна величини σ_R на параметр A вплине на коефіцієнт кореляції і параметри m_w і C_w . Для цього проведемо аналіз результатів випробувань лабораторних зразків із сталі 45 та сталі 40X на опір втоми, що мають широкий діапазон значень теоретичного коефіцієнта концентрації напруги. Деякі питання, пов'язані з проблемою, яка розглядається у даній статті, наведені у роботах [1-5].

Метою статті є визначення параметрів модернізованого рівняння Вейбулла, які відповідають максимальному значенню коефіцієнта кореляції із застосуванням методу найменших квадратів за допомогою програми Excel, а також пакета для чисельного розв'язання екстремальних задач програми Maxima.

Виклад основного матеріалу. З метою досягнення поставленої мети послідовно розглянемо застосування методу найменших квадратів, який буде реалізовано за допомогою пакетів Excel і Maxima [6].

1. РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У КЛАСИЧНОМУ ВИГЛЯДІ

Прологарифмувавши рівняння (4), маємо

$$m_w \lg(\sigma - A) = C_w - \lg N. \quad (2)$$

Вводячи позначення

$$y = \lg(\sigma - A), \quad x = \lg N, \quad k = -\frac{1}{m_w}, \quad b = \frac{C_w}{m_w},$$

запишемо рівняння (2) у вигляді

$$y = kx + b, \quad (3)$$

де x і y – змінні, значення яких братимемо з експериментальних даних, а параметри k і b будемо підбирати так, щоб функція (3) найкращим чином відображала ці експериментальні дані.

Експериментальні дані запишемо у вигляді таблиці

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

і знайдемо найменше значення функції

$$S(k, b) = \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2 \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)x_i = 2k \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i) = 2k \sum_{i=1}^n x_i + 2bn - 2 \sum_{i=1}^n y_i$$

Скористаємось необхідними умовами екстремуму, тобто розв'яжемо

$$\text{систему} \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial k} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Прийдемо до системи рівнянь:} \begin{cases} k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ k \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Поділивши обидві частини обох рівнянь на n , отримаємо

$$\begin{cases} k\bar{x}^2 + b\bar{x} = \bar{xy}, \\ k\bar{x} + b = \bar{y}. \end{cases}$$

Тут позначено

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}.$$

Розв'яжемо останню систему лінійних рівнянь методом Крамера.

Обчислимо головний визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} \overline{x^2} & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{vmatrix} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$

та допоміжний визначник $\Delta k = \begin{vmatrix} \overline{xy} & \bar{x} \\ \bar{y} & 1 \end{vmatrix} = \overline{xy} - \bar{x} \bar{y}$, тоді $k = \frac{\Delta k}{\Delta}$, тобто,

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (4)$$

Другий параметр b знайдемо з другого рівняння системи

$$b = \bar{y} - k \bar{x}. \quad (5)$$

Схожість залежності (3) експериментальним даним характеризується коефіцієнтом детермінації:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (6)$$

або коефіцієнтом кореляції:

$$r = \sqrt{R^2},$$

де

$$\hat{y}_i = kx_i + b.$$

Доведемо, що при знайдених значеннях k і b функція $S(k, b)$ досягає мінімуму. Для цього знайдемо частинні похідні цієї функції другого порядку.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial k \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n$$

та знайдемо
$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial k^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial k \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

За нерівністю Коші $n \sum_{i=1}^n x_i^2 > \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$, $\Delta > 0$, тому при знайдених значеннях k і b функція $S(k, b)$ досягає екстремуму, а саме

мінімуму, бо
$$\frac{\partial^2 S}{\partial k^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0.$$

Зауважимо, що функція $S(k, b)$ приймає лише невід'ємні значення, які прямують до нескінченності, якщо точка (k, b) прямує до нескінченності. За наслідком з теореми Вейерштрасса ця функція досягає найменшого значення, причому воно може бути лише в критичній точці. В нашому випадку критична точка одна єдина, її координати обчислюються за формулами (4), (5).

2. РЕАЛІЗАЦІЯ В ПРОГРАМІ EXCEL

Оскільки залежність (3) є лінійною, то можна скористатися пошуком оптимальних параметрів k і b методом найменших квадратів в програмі Excel при різних значеннях параметра A . Цей параметр підберемо таким чином, щоб коефіцієнт детермінації R^2 був найбільшим.

Експериментальні дані залежності N від σ для сталі 45 зразків II типу візьмемо з роботи [5] та запишемо їх в таблицю Excel (таблиця 1) та підрахуємо необхідні величини.

Таблиця 1

Результати розрахунку $x, y, xy, \hat{y}, \bar{y} (y - \hat{y})^2$ та $(y - \bar{y})^2$

n	σ	N	$\lg N$	$\lg(\sigma - A)$					
	МПа	цикл	x	y	xy	x^2	\hat{y}	$(y - \hat{y})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	270	77300	4,8882	2,4341	11,885	23,894	2,4381	4,58E-05	0,00281
2	270	87300	4,941	2,4314	12,013	24,414	2,4341	7,33E-06	0,00281
3	270	103000	5,0128	2,4314	12,188	25,129	2,4286	7,91E-06	0,00281
4	270	115900	5,0641	2,4314	12,313	25,645	2,4246	4,56E-05	0,00281
5	270	146900	5,167	2,4314	12,563	26,698	2,4167	0,000215	0,00281
6	250	197100	5,2947	2,3979	12,696	28,034	2,4069	8,02E-05	0,00039
7	250	232900	5,3672	2,3979	12,87	28,807	2,4013	1,15E-05	0,00039
8	250	262300	5,4188	2,3979	12,994	29,363	2,3974	3,4E-07	0,00039
9	250	304400	5,4834	2,3979	13,149	30,068	2,3924	3,08E-05	0,00039
10	250	370300	5,5686	2,3979	13,353	31,009	2,3858	0,000146	0,00039
11	230	588700	5,7699	2,3917	13,627	33,292	2,3704	7,48E-05	0,00028
12	230	708800	5,8505	2,3617	13,817	34,229	2,3642	6,03E-06	0,00028
13	230	740700	5,8696	2,3617	13,862	34,453	2,3672	9,72E-07	0,00028
14	230	835100	5,9217	2,3617	13,986	35,067	2,3587	9,1E-06	0,00028
15	230	1E+06	6,0416	2,3617	14,269	36,501	2,3495	0,000149	0,00028
16	230	1E+06	6,0926	2,3222	14,148	37,12	2,3456	0,000546	0,00315
17	210	1E+06	6,0935	2,3222	14,15	37,131	2,3455	0,000543	0,00315
18	210	3E+06	6,4448	2,3222	14,966	41,535	2,3185	1,37E-05	0,00315
19	210	3E+06	6,4481	2,3222	14,974	41,535	2,3183	1,57E-05	0,00315
20	210	4E+06	6,5946	2,3222	15,314	43,489	2,307	0,000231	0,00315
Сер Зн.	240	893600	5,6666	2,3783	13,457	32,373	2,3783	0,00218	0,03311

Тут кількість випробувань $n = 20$. В стовпчиках таблиці наведені необхідні дані для знаходження оптимальних параметрів k і b за формулами (4) і (5) та коефіцієнта детермінації R^2 за формулою (6). Таблиця складена при $A = 0$. За формулами (4) та (5) знайдемо

$$k = -0,07684, \quad b = 2,81374,$$

а за формулою (6) – коефіцієнт детермінації R^2 : $R^2 = 0,9342$.

Графік функції (3) та результати експерименту зображено на рис. 1.

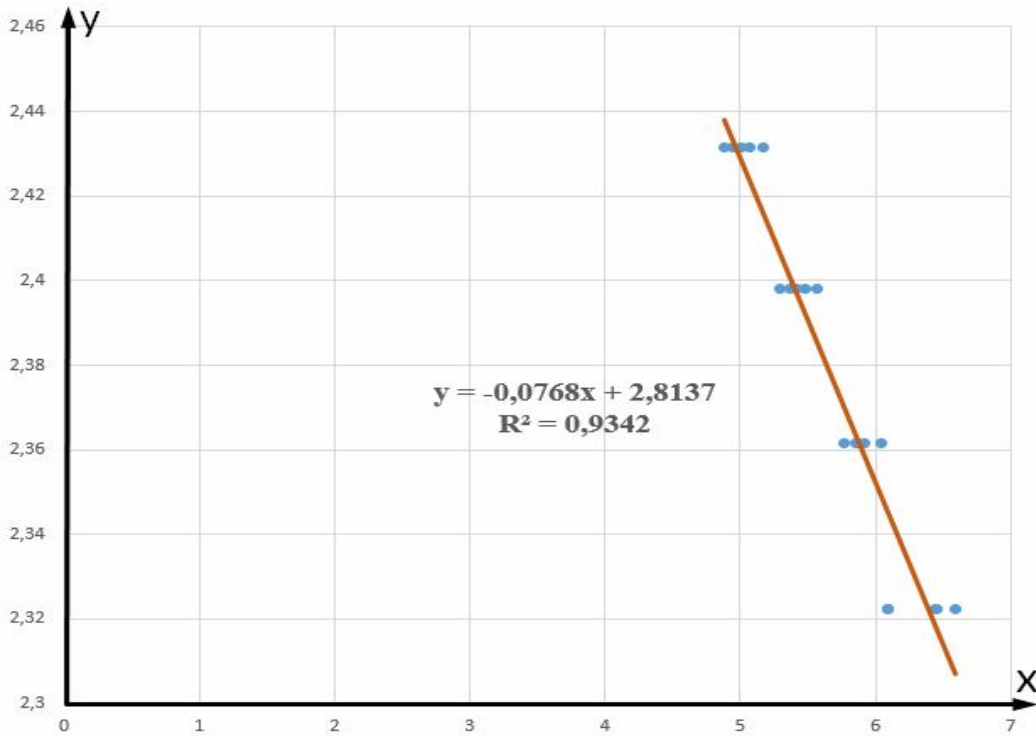


Рис. 1. Графіки функцій $y(x) = -0,768x + 2,8137$
та результати експерименту

Далі обчислимо параметри m_w та C_w :

$$m_w = \frac{-1}{k} = 13,01392, \quad C_w = m_w b = 36,61781$$

Тепер будемо змінювати параметр A і намагатимемось знайти таке його значення при якому коефіцієнт детермінації R^2 найбільший. Результати запишемо у таблицю 2.

Таблиця 2

Результати розрахунку m_w , C_w , A , R^2 в Excel

N	m_w	C_w	A	R^2
0	13,01	36,62	0	0,934152
1	12,47	35,08	10	0,934081
2	13,56	38,16	-10	0,934213
3	18,48	52,44	-100	0,934498
4	23,95	68,95	-200	0,934586
5	29,40	86,00	-300	0,934606
6	31,04	91,20	-330	0,934607
7	31,59	92,94	-340	0,934607
8	32,13	94,69	-350	0,934607
9	32,68	96,44	-360	0,934606

Тут найкращий результат досягаємо при

$$A = -340, \quad m_w = 31,59, \quad C_w = 92,94, \quad R^2 = 0,934607.$$

Зауважимо, що при зміні параметра A коефіцієнт детермінації R^2 змінюється не суттєво, а суттєво змінюються параметри m_w та C_w .

3. РЕАЛІЗАЦІЯ В ПРОГРАМІ МАХІМА

З рівняння (1) знайдемо залежність σ від N в явному вигляді:

$$\sigma = A + 10 \frac{C_w - \lg N}{m_w},$$

а результати цієї залежності, що знайдені експериментально для сталі 45 зразків II типу запишемо у матрицю M :

$$M = \begin{pmatrix} 77300 & 270 \\ 87300 & 270 \\ 103000 & 270 \\ 115900 & 270 \\ 146900 & 270 \\ 197100 & 250 \\ 232900 & 250 \\ 262300 & 250 \\ 304400 & 250 \\ 370300 & 250 \\ 588700 & 230 \\ 708800 & 230 \\ 740700 & 230 \\ 835100 & 230 \\ 1100500 & 230 \\ 1237700 & 210 \\ 1240200 & 210 \\ 2784800 & 210 \\ 2806300 & 210 \\ 3931800 & 210 \end{pmatrix}$$

Тут у першому стовпці записано експериментальні значення N , а у другому – відповідні значення σ .

Для використання метода найменших квадратів складемо функцію

$$s = \sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_W - \lg N_i}{m_W}} - \sigma_i \right)^2 \quad (7)$$

та мінімізуємо її. Тут n – кількість випробувань, в нашому прикладі $n = 20$, N_i та σ_i – числові значення експериментів, що записані у матрицю M .

Параметри m_W , C_W та A підберемо так, щоб функція $s = s(m_w, C_w, A)$ досягла б найменшого значення.

Розв'яжемо задачу в системі комп'ютерної математики wxMaxima.

Введемо матрицю M: matrix ([77300,270], [87300,270], [103000,270], [115900,270], [146900,270], [197100,250], [232900,250], [262300,250], [304400,250], [370300,250], [588700,230], [835100,230], [708800,230], [740700,230], [1100500,230], [1237700,210], [1237700,210], [1240200,210], [2784800,210], [2806300,210], [3931800,210]);
та функцію σ

$$\sigma(m_W, c_W, A, N) := A + 10^{((c_W - \lg(N)) / m_W)};$$

$$\sigma(m_W, c_W, A, N) := A + 10^{\frac{c_W - \lg(N)}{m_W}}.$$

Складемо функцію $s = s(m_w, C_w, A)$:

$\Delta : 0$

for $i : 1$ *thru* $\text{length}(M)$ *step* 1 *do*

$\Delta : \Delta + (M[i,2] - \sigma(m_W, c_W, M[i,1]))^2$;

done

$s(m_W, c_W, A) := \Delta$

Завантажимо модуль пакету для чисельного розв'язання екстремальної задачі на мінімум:

load (lbfgs);

та скористаємось наступною командою:

lbfgs($s(m_W, c_W, A)$, [m_W, c_W, A],
[13,01;6,62;0,00], 1e-6, [1,1])

Перший аргумент $s(m_W, c_W, A)$ цієї команди вказує на функцію, яку потрібно мінімізувати. Другий аргумент $[m_W, c_W, A]$ вказує на параметри, які потрібно знайти. Третій аргумент $[13.01, 36.62, 0.00]$ задає початкові дані на той випадок, якщо задачу неможливо розв'язати точними методами. У якості таких початкових даних ми взяли результати обчислень в програмі Excel при $A = 0$ (дивись таблицю 2). Четвертий аргумент $1e - 6$ задає точність обчислень 10^{-6} . Останній аргумент $[1,1]$ задає параметри виводу результатів. Отримали наступний результат:

$$m_W = 7,79, \quad C_W = 22,47, \quad A = 94,67, \quad R^2 = 0,940957.$$

Якщо ці дані підставити у команду `lbfgs` у якості нових початкових даних, то матимемо

$$m_W = 7,00, \quad C_W = 20,44, \quad A = 109,19, \quad R^2 = 0,941032.$$

Процес зійшовся. Результати інших обчислень запишемо у таблицю 3.

З цих розрахунків можна зробити наступний висновок: при зміні A коефіцієнт детермінації R^2 змінюється дуже повільно, але суттєво змінюються коефіцієнти m_W та C_W .

На рис. 2 представлено графік залежності σ від N при $m_W = 7$, $C_W = 20.44$, $A = 109.19$.

Таблиця 3

Результати розрахунку m_W , C_W , A , R^2 в *Maxima*

N	m_W	C_W	A	R^2
0	13,01	36,62	0	0,934152
1	7,79	22,47	94,67	0,940957
2	7,00	20,44	109,19	0,941032
3	20,03	57,12	-130,65	0,938217
4	31,04	91,20	-330	0,937043
5	1,40	7,65	204	0,848711

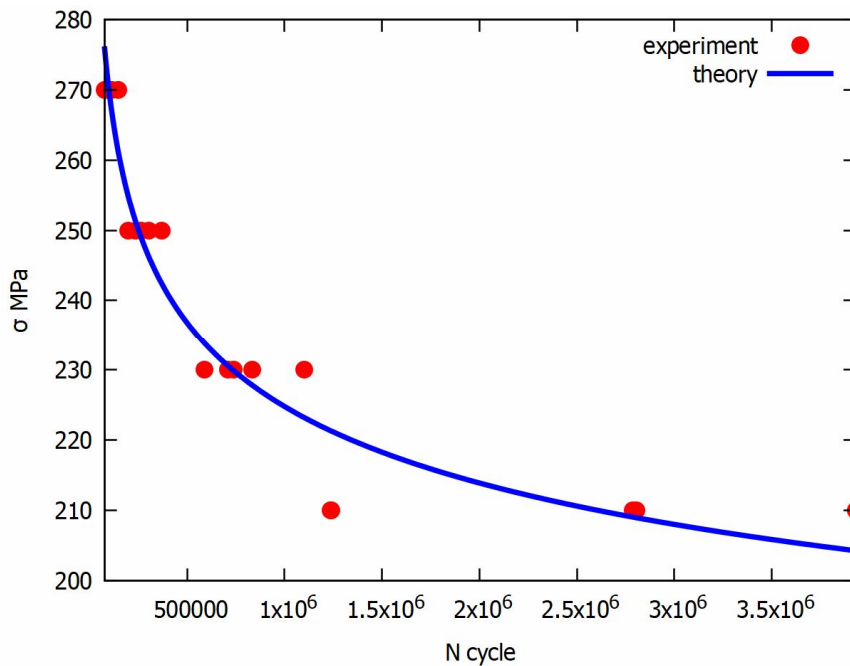


Рис. 2. Графіки функцій $\sigma(N)$ при $m_w = 7$, $C_w = 20,44$, $A = 109,19$

Аналогічні результати можна навести і для інших видів сталі.
Сталь 45, зразки I типу:

$$m_w = 81,64; \quad C_w = 259,20; \quad A = -999,94; \quad R^2 = 0,80.$$

Сталь 45, зразки IV типу:

$$m_w = 2,65; \quad C_w = 10,64; \quad A = 122,10; \quad R^2 = 0,94.$$

Сталь 40X, зразки I типу:

$$m_w = 5,62; \quad C_w = 16,43; \quad A = 215,07; \quad R^2 = 0,89.$$

Сталь 40X, зразки III типу:

$$m_w = 112,46; \quad C_w = 393,91; \quad A = -2628,95; \quad R^2 = 0,85.$$

Сталь 40X, зразки IV типу:

$$m_w = 1,36; \quad C_w = 7,44; \quad A = 158,11; \quad R^2 = 0,94.$$

4. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ

В цьому розділі детальніше розглянемо задачу мінімізації функції (7):

$$s = \sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right)^2.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial s}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right),$$

$$\frac{\partial s}{\partial m_w} = 2 \ln 10 \sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} \frac{\lg N_i - C_w}{m_w^2},$$

$$\frac{\partial s}{\partial C_w} = \frac{2 \ln 10}{m_w} \sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}}.$$

Необхідні умови екстремуму приводять до наступної системи трьох рівнянь з трьома невідомими m_w , C_w та A :

$$\sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) 10^{\frac{-\lg N_i}{m_w}} (\lg N_i - C_w) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) 10^{\frac{-\lg N_i}{m_w}} = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) = 0, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) 10^{\frac{-\lg N_i}{m_w}} = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(A + 10^{\frac{C_w - \lg N_i}{m_w}} - \sigma_i \right) 10^{\frac{-\lg N_i}{m_w}} \lg N_i = 0 \quad (10)$$

Отже, для знаходження параметрів m_w , C_w та A ми отримали систему трьох рівнянь (8), (9) та (10). Розв'яжемо її методом Ньютона.

Згадаємо метод Ньютона для наближеного розв'язання рівняння

$$f(x) = 0.$$

Якщо рівняння містить лише одну змінну x , то наближені значення кореня обчислюють за формулою

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тут x_0 – початкове значення шуканого кореня.

У даній роботі метод Ньютона доведеться узагальнити для рівнянь, що задані у багатовимірних просторах. Для цього в попередній формулі x_i та $f(x_i)$ слід розуміти як вектор-стовпці, похідну $f'(x_{i-1})$ слід замінити матрицею Якобі, а ділення – оберненою матрицею. В цьому випадку формула набуває вигляду:

$$x_i = x_{i-1} - \left(f'(x_{i-1}) \right)^{-1} f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Обчислення будемо проводити в системі комп'ютерної математики wxMaxima. Експериментальні дані візьмемо з роботи [5] для сталі 45 зразків I типу M: matrix ([72200,300], [86200,300], [98300,300], [113300,300], [199200,300], [206800,285], [206800,285], [299100,285], [308900,285], [394400,285], [336600,270], [362400,270], [547100,270], [602600,270], [703600,270]);

Кількість випробувань $n = 15$ дорівнює кількості рядків матриці M

$n : \text{lenght}(M);$

15

Перепишемо систему рівнянь (8)-(10) в наступному вигляді:

$$\begin{cases} nA + 10^{\frac{C_w}{m_w}} \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-1}{m_w}} - \sum_{i=1}^n \sigma_i = 0, \\ A \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-1}{m_w}} + 10^{\frac{C_w}{m_w}} \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-2}{m_w}} - \sum_{i=1}^n \sigma_i N_i^{\frac{-1}{m_w}} = 0, \\ A \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-1}{m_w}} \lg N_i + 10^{\frac{C_w}{m_w}} \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-2}{m_w}} \lg N_i - \sum_{i=1}^n \sigma_i N_i^{\frac{-1}{m_w}} \lg N_i = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Обчислимо суму $\Sigma \sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i :$

$\Sigma \sigma : \text{sum}(M[i, 2], i, 1, n);$

4275

та введемо позначення сум, що зустрічаються в системі (11):

$$\Sigma 1N(m_w) = \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-1}{m_w}} :$$

$$\Sigma 1N(mw) := \text{float}(\text{sum}(M[i, 1]^{(-1/mw)}, i, 1, n));$$

У вікні wxMaxima результат відображується так:

$$\Sigma 1N(mw) := \text{float} \left(\sum_{i=1}^n M_{i,1}^{\frac{-1}{mw}} \right);$$

Далі буде аналогічно:

$$\Sigma 2N(m_w) = \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-2}{m_w}} :$$

$$\Sigma 2N(mw) := \text{float}(\text{sum}(M[i,1]^{(-2/mw)}, i, 1, n));$$

$$\Sigma 2N(m_w) := \text{float} \left(\sum_{i=1}^n M_{i,1}^{\frac{-2}{m_w}} \right);$$

$$\Sigma 3N(m_w) = \sum_{i=1}^n \sigma_i N_i^{\frac{-1}{m_w}} :$$

$$\Sigma 3N(mw) := \text{float}(\text{sum}(M[i,2] \cdot M[i,1]^{(-1/mw)}, i, 1, n));$$

$$\Sigma 3N(mw) := \text{float} \left(\sum_{i=1}^n M_{i,2} M_{i,1}^{\frac{-1}{m_w}} \right);$$

$$\Sigma 4N(m_w) = \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-1}{m_w}} \lg N_i :$$

$$\Sigma 4N(mw) := \text{float}(\text{sum}(\lg(M[i,1]) \cdot M[i,1]^{(-1/mw)}, i, 1, n));$$

$$\Sigma 4N(mw) := \text{float} \left(\sum_{i=1}^n \lg(M_{i,1}) M_{i,1}^{\frac{-1}{m_w}} \right);$$

$$\Sigma 5N(m_w) = \sum_{i=1}^n N_i^{\frac{-2}{m_w}} \lg N_i :$$

$$\Sigma 5N(mw) := \text{float}(\text{sum}(\lg(M[i,1]) \cdot M[i,1]^{-2/mw}, i, 1, n));$$

$$\Sigma 5N(mw) := \text{float}\left(\sum_{i=1}^n \lg(M_{i,1}) M_{i,1}^{-2/mw}\right);$$

$$\Sigma 6N(m_w) = \sum_{i=1}^n \sigma_i N_i^{-1/m_w} \lg N_i;$$

$$\Sigma 6N(mw) := \text{float}(\text{sum}(M[i,2], \lg(M[i,1]) \cdot M[i,1]^{-1/mw}, i, 1, n));$$

$$\Sigma 6N(mw) := \text{float}\left(\sum_{i=1}^n M_{i,2} \lg(M_{i,1}) M_{i,1}^{-1/mw}\right)$$

Позначимо функції, що записано в лівих частинах системи рівнянь (11), так:

$$f_1(m_w, C_w, A), \quad f_2(m_w, C_w, A), \quad f_3(m_w, C_w, A).$$

Задамо їх в Maxima:

$$f1(mw, cw, A) := n \cdot A + 10^{(cw/mw)} \cdot \Sigma 1N(mw) - \Sigma \sigma;$$

$$f1(mw, cw, A) := n \cdot A + 10^{cw/mw} \cdot \Sigma 1N(mw) - \Sigma \sigma;$$

$$f2(mw, cw, A) := A \cdot \Sigma 1N(mw) + 10^{(cw/mw)} \cdot \Sigma 2N(mw) - \Sigma 3N(mw);$$

$$f2(mw, cw, A) := A \cdot \Sigma 1N(mw) + 10^{cw/mw} \cdot \Sigma 2N(mw) - \Sigma 3N(mw);$$

$$f3(mw, cw, A) := A \cdot \Sigma 4N(mw) + 10^{(cw/mw)} \cdot \Sigma 5N(mw) - \Sigma 6N(mw);$$

$$f3(mw, cw, A) := A \cdot \Sigma 4N(mw) + 10^{cw/mw} \cdot \Sigma 5N(mw) - \Sigma 6N(mw)$$

Задамо початкові значення $m_w = 13,01$; $C_w = 92,94$; $A = 0$:

$$mw0 : 13.01\$ \quad cw0 : 36.62\$ \quad A0 : 0.00\$$$

та запишемо їх у матрицю X

$$X : matrix([mw0],[cw0],[A0])$$

$$\begin{pmatrix} 13,01 \\ 36,62 \\ 0,0 \end{pmatrix}$$

Складемо вектор-функцію із лівих частин системи рівнянь (11):

$$f(mw, cw, A) := matrix \begin{pmatrix} [f1(mw, cw, A)], \\ [f2(mw, cw, A)], \\ [f3(mw, cw, A)] \end{pmatrix};$$

$$f(mw, cw, A) := \begin{pmatrix} f1(mw, cw, A) \\ f2(mw, cw, A) \\ f3(mw, cw, A) \end{pmatrix}$$

та обчислимо її у початковій точці

$$f(X[1,1], X[2,1], X[3,1]);$$

$$\begin{pmatrix} -494,8296448403175 \\ -190,2185686001735 \\ -1026,060118173835 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо матрицю Якобі J

$$J : array(J,3,3);$$

J

Перший рядок цієї матриці складається із частинних похідних функції f_1 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial m_w}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial C_w}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial A} = n:$$

```
define(Dmwf1(mw,cw,A),diff(f1(mw,cw,A),mw))$;  
define(Dcwf1(mw,cw,A),diff(f1(mw,cw,A),cw))$
```

Обчислимо елементи першого рядка матриці J при заданих початкових умовах

$$J[1,1]: \text{float}(Dmwf1(mw0,cw0,A0));$$

$$-1607.056395530234$$

$$J[1,1]: \text{float}(Dcwf1(mw0,cw0,A0));$$

$$669.0364265002837$$

$$J[1,3]: n;$$

$$15$$

Другий рядок матриці J складається із частинних похідних функції f_2 :

$$\frac{\partial f_2}{\partial m_w}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial C_w}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial A}:$$

```
define(Dmwf2(mw,cw,A),diff(f2(mw,cw,A),mw))$;
```

```
define(Dcwf2(mw,cw,A),diff(f2(mw,cw,A),cw))$;
```

```
define(DAf2(mw,cw,A),diff(f2(mw,cw,A),A))$.
```

Обчислимо елементи другого рядка матриці J при заданих початкових умовах

$J[2,1]: \text{float}(Dmwf2(mw0, cw0, A0));$
-636.5147026823089

$J[2,2]: \text{float}(Dcwf2(mw0, cw0, A0));$
259.041234282945

$J[2,3]: \text{float}(DAf2(mw0, cw0, A0));$
5.790999046273589

Третій рядок матриці J складається із частинних похідних функції f_3 :

$$\frac{\partial f_3}{\partial m_w}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial C_w}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial A};$$

$\text{define}(Dmwf3(mw, cw, A), \text{diff}(f3(mw, cw, A), mw))\$;$

$\text{define}(Dcwf3(mw, cw, A), \text{diff}(f3(mw, cw, A), cw))\$;$

$\text{define}(DAf3(mw, cw, A), \text{diff}(f3(mw, cw, A), A))\$.$

Обчислимо елементи третього рядка матриці J при заданих початкових умовах

$J[3,1]: \text{float}(Dmwf3(mw0, cw0, A0));$
-3406,166299672669

$J[3,2]: \text{float}(Dcwf3(mw0, cw0, A0));$
1386,631775395615

$J[3,3]: \text{float}(DAf3(mw0, cw0, A0));$
31,09406948090976

Запишемо отриману матрицю J :

$J : \text{genmatrix}(J, 3, 3);$

$$\begin{pmatrix} -1607,056395530234 & 669,0364265002837 & 15 \\ -636,5147026823089 & 259,0412342829845 & 5790999046273589 \\ -3406,166299672669 & 1386,631775395615 & 31,09406948090976 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю J^{-1}

$L : J^{-1};$

$$\begin{pmatrix} 0,02746146320496288 & -0,003995704680548916 & -0,01250343980606606 \\ 0,07429839358739565 & 1,249954962308265 & -0,2686352747603959 \\ -0,3050807777512656 & -56,17911493536953 & 10,64220342341007 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона знайдемо перше наближення X до кореня системи рівнянь (11):

$$X = X - J^{-1} f(m_w, C_w, A),$$

$X : X - J^{-1} . f (X[1,1], X[2,1], X[3,1]);$

$$\begin{pmatrix} 13,00940793463263 \\ 35,51374968970674 \\ 82,2666611212353 \end{pmatrix}.$$

При цих нових значеннях обчислимо значення функції f

$f (X[1,1], X[2,1], X[3,1]);$

$$\begin{pmatrix} 67,7517272079449 \\ 26,22306017536289 \\ 140,3701237310306 \end{pmatrix}.$$

У якості похибки Δ обчислень приймемо

$$\Delta = |f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

$$\Delta : \text{sqrt}(\%[1,1]^2 + \%[2,1]^2 + \%[3,1]^2);$$

$$158,0560567042128$$

Отримане значення X приймемо за початкове і знову скористаємось формулою Ньютона. Отримаємо друге наближення до кореня системи (11)

$$X : X - J1.f(X[1,1], X[2,1], X[3,1]);$$

$$\begin{pmatrix} 13,00873536776097 \\ 35,41062775891807 \\ 82,27731098578124 \end{pmatrix}.$$

$$f(X[1,1], X[2,1], X[3,1]);$$

$$\begin{pmatrix} 12,52463962483671 \\ 4,840611200688045 \\ 25,91121861431202 \end{pmatrix};$$

$$\Delta : \text{sqrt}(\%[1,1]^2 + \%[2,1]^2 + \%[3,1]^2);$$

$$29,18371745694722$$

На шостому кроці отримали

$$X : X - J1.f(X[1,1], X[2,1], X[3,1]);$$

$$\begin{pmatrix} 13,00632273725362 \\ 35,38080617697805 \\ 82,31533749695924 \end{pmatrix};$$

$$f(X[1,1], X[2,1], X[3,1]);$$

$$\begin{pmatrix} 0,01464373532235186 \\ -0,002636075512782554 \\ -0,01437400351278484 \end{pmatrix};$$

$$\Delta : \text{sqrt}(\%[1,1]^2 + \%[2,1]^2 + \%[3,1]^2);$$

$$0,020688157346806297.$$

Таким чином, отримали

$$m_w = 13,0063; \quad C_w = 35,3808; \quad A = 82,3153$$

з похибкою

$$\Delta \leq 0,02069.$$

Висновки. У даній роботі розглянуто модернізоване рівняння Вейбулла з теорії випробувань матеріалів

$$(\sigma - A)^{m_w} N = 10^{C_w},$$

яке аналітично описує залежність σ від N , де A , m_w та C_w параметри. За експериментальними даними залежності σ від N параметри потрібно підібрати так, щоб рівняння Вейбулла найкраще описувало експериментальні дані. Цю задачу ми розв'язали трьома способами.

1. Прологарифмувавши рівняння Вейбулла, прийшли до рівняння

$$m_w \lg(\sigma - A) = C_w - \lg N,$$

яке задає лінійну залежність $\lg(\sigma - A)$ від $\lg N$. При фіксованих значеннях параметра A в програмі Excel лінійним методом найменших квадратів знаходили параметри m_w та C_w . Параметр A підбирали таким чином, щоб коефіцієнт

детермінації R^2 був найбільшим. Виявилось, що при змінні параметра A коефіцієнт детермінації R^2 мало змінюється, а суттєво змінюються параметри m_W та C_W . Такий спосіб розв'язання задачі виявився найбільш простим і ефективним.

2. З рівняння Вейбулла записали залежність σ від N у явному вигляді

$$\sigma = A + 10 \frac{C_w - \lg N}{m_w}$$

та методом найменших квадратів знаходили всі три параметра A , m_W та C_W . Склали функцію

$$s = \sum_{i=1}^n \left(A + 10 \frac{C_w - \lg N_i}{m_w} - \sigma_i \right)^2,$$

де N_i та σ_i – експериментальні дані. Знайшли мінімум цієї функції, користуючись готовим пакетом програми Matha.

3. Мінімум функції $s = s(m_w, C_w, A)$ знаходили за необхідними умовами екстремуму: частинні похідні функції $s = s(m_w, C_w, A)$ прирівнювали до нуля. Отримали складну систему трьох рівнянь з трьома невідомими, яку розв'язали методом Ньютона у матричному вигляді. Обчислення проводили в системі Matha.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Олейник Н.В., Скляр С.П. Прискорені випробування на втоми. Київ: Наукова думка, 1985. 304 с.
2. Рябов Б.А., Бишко М.Д. Зв'язок між параметрами кривих втоми в логарифмічних та напівлогарифмічних координатах. // Деталі машин: Респ. міжвед. наук. – техн. зб. 1990. Вип. 50. С. 57-60.
3. Олейник В.Н., Конопльов А.В. Взаємозв'язок параметрів різних моделей кривих втоми. // Деталі машин: Респ. міжвед. наук.-техн. зб. 1991. Вип. 54. С. 83-89.
4. Олейник Н.В., Конопльов А.В., Кібаков А.Г. Методи прискореного визначення характеристик опору втоми в практичних застосуваннях. Одеса: Астропринт, 2000. 138 с.

5. Конопльов А.В., Григор'єв Ю.О., Галевський В.В. Спосіб перерахунку параметрів двох моделей кривої втими // Вісник Одеського національного морського університету: 36 наук. праць, 2023. № 4 (71). С. 87-95. DOI 10.47049/2226-1893-2023-4-87-95.
6. Чичкар'єв Є.А., Чорновіан Ю.О. Підручник-довідник із системи комп'ютерної алгебри Maxima (переклад українською, доповнення, осучаснення). Розповсюджується згідно з умовами ліцензування GNU FDL. 2020 р. 186 с.

REFERENCES

1. Olejnik N.V., Sklyar S.P. Priskoreni viprobuvannya na vtomu. Kiyiv: Naukova dumka, 1985. 304 s.
2. Ryabov B.A., Bishko M.D. Zv'yazok mizh parametrami krivih vtomi v logarifmichnih ta napivlogarifmichnih koordinatah. // Detali mashin: Resp. mizhved. nauk. – tehn. zb. 1990. Vip. 50. S. 57-60.
3. Olejnik V.N., Konoplev A.V. Vzayemozv'yazok parametriv riznih modelej krivih vtomi. // Detali mashin: Resp. mizhved. nauk.-tehn. zb. 1991. Vip. 54. S. 83-89.
4. Olejnik N.V., Konoplev A.V., Kibakov A.G. Metodi priskorenogo viznachennya karakteristik oporu vtomi v praktichnih zastosuvannya. Odesa: Astroprint, 2000. 138 s.
5. Konoplev A.V., Hryhoriev Yu.O., Galevskij V.V. Sposib pererahunku parametriv dvoh modelej krivoyi vtomi // Visnik Odeskogo nacionalnogo morskogo universitetu: 36 nauk. Prac, 2023. № 4 (71). S. 87-95. DOI 10.47049/2226-1893-2023-4-87-95.
6. Chichkarov Ye.A., Chornovian Yu.O. Pidruchnik-dovidnik iz sistemi komp'yuternoyi algebri Maxima (pereklad ukrayinskoyu, dopovnennya, osuchasnennya). Rozpovsyudzhuyetsya zgidno z umovami licenzuvannya GNU FDL. 2020 r. 186 s.

Стаття надійшла до редакції 24.12.2024

Посилання на статтю: Конопльов А.В., Григор'єв Ю.О., Кусік Л.І. Розрахунок параметрів модернізованого рівняння Вейбулла // Вісник Одеського національного морського університету: 36 наук. праць, 2025. № 1 (75). С. 42-68. DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-42-68.

Article received 24.12.2024

Reference a journal artic: Konoplev A.V., Hryhoriev Yu.O., Kusik L.I. Calculation of parameters of the modernized Weibull equation // *Herald of the Odesa National Maritime University: Coll. scient. works*, 2025. № 1 (75). P. 42-68. DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-42-68.