

УДК 624.154

DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-7-20

**СУМІСНИЙ РОЗРАХУНОК ПІДПІРНОЇ СПОРУДИ
І ДЕФОРМУЄМОГО СЕРЕДОВИЩА
ПРИ СКЛАДНОМУ СТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

А.В. Гришин

д.т.н., професор кафедри «Машинознавство й інженерна механіка»

В.В. Олейніков

к.т.н., доцент кафедри «Машинознавство й інженерна механіка»

Одеський національний морський університет, Одеса, Україна

***Анотація.** Розглянута зв'язана система, що складається з підпірної споруди, ґрунтового і водного середовища. Враховані пружно-пластичні властивості матеріалів системи. Використана теорія пластичної течії зі зміцненням. У якості функції навантаження для ґрунтового середовища використана умова Кулона-Мора, а для залізобетонної стінки – умова Генієва. Дискретизація розрахункової області була виконана методом скінчених елементів. Результати дослідження представлені у вигляді схеми утворення пластичних зон у системі, епюр горизонтальних переміщень зовнішньої стінки та епюр бічних тисків ґрунту засипки на внутрішню стінку.*

***Ключові слова:** підпірна споруда, ґрунтове і водне середовище, теорія пластичної течії зі зміцненням, функція навантаження, методом скінчених елементів, епюра.*

UDC 624.154

DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-7-20

**COMPREHENSIVE CALCULATION
OF A RETAINING STRUCTURE AND A DEFORMABLE ENVIRONMENT
UNDER COMPLEX STATIC LOADING**

A. Grishin

Doctor of Technical Sciences,

Professor of the Department of «Mechine Science and Engineering Mechanics»

V. Oleynikov

PhD Associate Professor

of the Department of «Mechine Science and Engineering Mechanics»

Odesa National Maritime University, Odesa, Ukraine

Abstract. *A connected system consisting of a retaining structure, soil and water environment is considered. The elastic-plastic properties of the system materials are taken into account. The theory of plastic flow with strengthening is used. The Coulomb-Mohr condition was used as the load function for the soil medium, and the Geniev condition for the reinforced concrete wall. Discretization of the computational domain was performed using the finite element method. The research results are presented in the form of a diagram of the formation of plastic zones in the system, graphs of horizontal movements of the outer wall and graphs of lateral pressures of the backfill soil on the inner wall.*

Keywords: *retaining structure, soil and water environment, theory of plastic flow with strengthening, load function, finite element method, diagram.*

Вступ. В даний час довжина тільки вантажних причалів морських портів України становить приблизно 43 км (близько 330 причалів). Проведений інститутом «ЧорноморНДІПроект» аналіз тривалості експлуатації причальних споруд показав, що до теперішнього часу термін служби більшості причальних споруд складає 30-40 років і наближається до нормативного або перевищує його. За даними того ж джерела, кількість споруд, що експлуатуються 30 років і більше – близько 70 % [1; 2].

Причали, як гідротехнічні споруди, належать до основних виробничих потужностей портів (а відповідно до Закону про морські порти – до стратегічних об'єктів портової інфраструктури) [3]. Своєчасна оцінка їхнього фактичного технічного стану та використання сучасних методів розрахунку сприятиме виявленню причин небажаних змін і прийняття адекватних заходів щодо забезпечення безпечної та ефективної їх експлуатації.

Протягом всієї історії будівництва і експлуатації причальних споруд і по теперішній час були відзначені численні випадки їх аварій і руйнувань, які можуть бути причиною загибелі людей і величезних матеріальних збитків, що є неприпустимим [4; 5]. Однак, незважаючи на виняткову важливість, питання про причини руйнування причальних споруд розроблені далеко не достатньо. Такий стан пояснюється складністю аналізу причин руйнувань, різноманіттям їхніх форм і часто недостатністю фактичних даних спостережень за станом споруд і їхніх основ.

Тому вельми актуальною проблемою є розробка нових і удосконалення існуючих методів розрахунку причалів, а також нормативної бази, що застосовуються при їх проектуванні і оцінці технічного стану.

Незважаючи на значний прогрес в описі роботи підпірних стінок при використанні пружно-пластичної постановки в розрахунках портової гідротехніки, їхнє використання знаходиться в стадії наукових розробок і в даний час не набуло поширення в проектній практиці. Визначається це тим, що відсутня надійна апробація і доводиться долати деякі умовності в прийнятих моделях ґрунту, що описують дійсну роботу споруди.

З розвитком сучасної обчислювальної техніки, впровадженням чисельних методів розв'язання задач будівельної механіки для багаторазово статично

невизначених систем, розрахунків плоских і просторових конструкцій з урахуванням складного характеру навантажень при різних граничних умовах став рядовим для інженера-проектувальника. Поняття скінчених елементів було вперше введено М. Тернером, Р. Клафом, Х. Мартіном, Л. Топпом. Подальший розвиток методу відображено в роботах зарубіжних і вітчизняних дослідників Дж. Аргіріса, Е.І. Вільсона, М.Р. Айронса, Р.У. Клафа, У.М. Дженкінса, О.К. Зенкевича, Л.А. Розіна, та ін. [6-9].

У розробці прикладного програмного забезпечення, що реалізує скінчено-елементний підхід для вирішення завдань механіки, безперечно, лідируюче положення займає українська школа. Перш за все слід зазначити роботи А.С. Городецького і розроблене під його керівництвом сімейство програм, що не зовсім коректно об'єднується назвою «Ліра»; А.В. Перельмутера, В.С. Карпіловського, Е.З. Кріксунова, С.Ю. Фіалко та ін. співробітників «SCAD Soft»; Л.А. Розіна, С.Ф. Клованича, Ю.І. Немчинова та ін. [10-15].

Виходячи із зазначеного вище витікає, що питання удосконалення існуючих і розробка нових методів розрахунку споруд, що розглядаються у роботі з використанням сучасних моделей матеріалів є **актуальною задачею**.

Мета цієї роботи полягає у вивченні напружено-деформованого стану спільної роботи підпірної споруди з ґрунтовим та водним середовищем, що знаходяться під дією статичних навантажень. При цьому враховувалися пружно-пластичні властивості матеріалів конструкцій і ґрунту та процес складного навантаження.

Викладення основного матеріалу. Показана на рис. 1 конструкція широко використовується в гідротехнічному будівництві, наприклад, як причальна стінка морських та річкових портів або як огорожувальне спорудження штучних островів морського шельфу [16]. Залежно від її призначення основне діюче навантаження може бути статичним або динамічним. У статті розглядався лише перший тип навантаження. І воно діяло не пропорційне часовому параметру, тобто умови простого навантаження порушуються. Внаслідок цього для моделювання стінки та навколишнього середовища застосовувалася теорія пластичної течії зі зміцненням [2].

У цій роботі підпирна стінка і деформоване середовище розглядалися як розрахункова система. Вважалося, що деформації системи відбувалися при малих подовженнях, зсувах та кутах повороту, тому мав місце постулат підсумовування прирощень пружної та пластичної деформації. Він записувався у такому вигляді:

$$d\varepsilon_{ks} = d\varepsilon_{ks}^{(e)} + d\varepsilon_{ks}^{(p)}, \quad (1)$$

де $d\varepsilon_{ks}^{(e)}$ і $d\varepsilon_{ks}^{(p)}$ відповідно компоненти тензорів пружної та пластичної деформацій.

Компоненти тензора збільшення пружної деформації пов'язані з компонентами тензора збільшення напружень законом Гука

$$d\varepsilon_{ks}^{(e)} = C_{ksmn}^{(e)} d\sigma_{mn}. \quad (2)$$

Компоненти тензора збільшення пластичної деформації в околиці регулярної точки функції навантаження визначалися зі співвідношення [17]

$$d\varepsilon_{ks}^{(p)} = d\lambda f_{,\sigma_{ks}}, \quad (3)$$

де $d\lambda$ – додатна константа;

$f_{,\sigma_{ks}}$ – похідна від функції навантаження σ_{ks} .

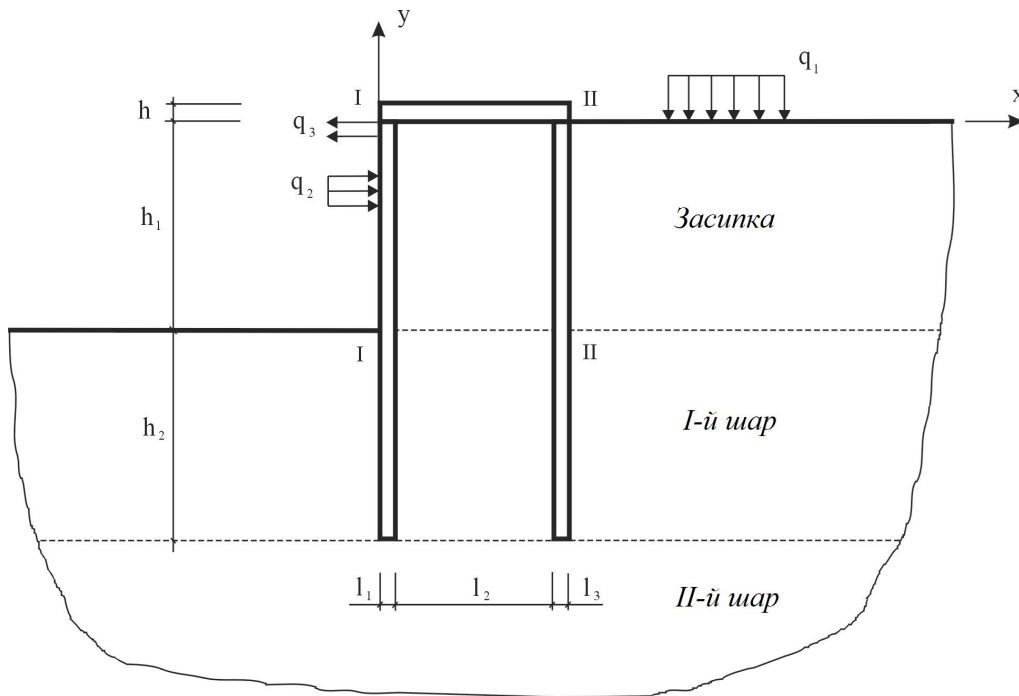


Рис. 1. Розрахункова схема

Підставивши (2) і (3) в (1), після перетворень, виходять наступні рівняння стану системи

$$\begin{aligned} d\sigma_{ks} &= D_{ksmn}^{(e)} d\varepsilon_{mn}, \text{ якщо } f = 0, d'f \leq 0 \text{ або } f < 0; \\ d\sigma_{ks} &= D_{ksmn}^{(ep)} d\varepsilon_{mn}, \text{ якщо } f = 0, d'f > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де: $D_{ksmn}^{(e)}$ – модулі пружності;

$$D_{ksmn}^{(ep)} = \left[D_{ksmn}^{(e)} - \frac{f_{,\sigma_{ks}} D_{ksmn}^{(e)} f_{,\sigma_{ks}} D_{ksmn}^{(e)}}{f_{,\sigma_{ks}} D_{ksmn}^{(e)} f_{,\sigma_{ks}} - af_{,\rho_{il}} f_{,\sigma_{il}}} \right]; \quad (5)$$

a – параметр кінематичного зміщення;

$$\rho_{il} = a\varepsilon_{il}^{(p)}.$$

Компоненти тензора збільшення деформації зв'язувалися з компонентами вектора збільшення переміщень співвідношеннями Коші

$$d\varepsilon_{ks} = \frac{1}{2}(du_{k,s} + du_{s,k}). \quad (6)$$

Рівняння рівноваги було визначено із принципу віртуальної роботи [18], яке мало наступний вигляд

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \Delta \sigma_{ks}^i \delta d\varepsilon_{ks}^i - \Delta F_s^i \delta du_s^i + \left[\sigma_{ks}^{i-1} \delta(d\varepsilon_{ks}^i) - F_s^{i-1} \delta(du_s^i) \right] \right\} dV - \\ - \int_{S_1} (dq_s^i + q_s^{i-1}) \delta(du_s^i) dS = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\sigma_{ks}^i = \sigma_{ks}^{i-1} + d\sigma_{ks}^i$, $F_s^i = F_s^{i-1} + dF_s^i$, $q_s^i = q_s^{i-1} + dq_s^i$.

У якості функції навантаження для деформованого середовища використовувалася умова Кулона-Мора, яка через інваріанти тензора напружень представлялася як

$$\left(\sigma_0 - \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \sin \psi \right) \sin \varphi + \sigma_i \cos \psi - c \cos \varphi = 0, \quad (8)$$

де σ_0, σ_i, ψ – інваріанти тензора напружень [19], φ, c – кут внутрішнього тертя та зчеплення гуртового середовища.

Передбачалося, що стінка була виготовлена із залізобетону, тому для бетону застосовувалася умова Генієва [20]

$$3(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_0 + 3\sigma_i^2 - \sigma_p\sigma_c = 0, \quad (9)$$

де σ_c, σ_p – межі пластичності при стисканні та розтягуванні, а для металу – умова Мізеса, яка визначалася з (9) при $\sigma_T = \sigma_m = \sigma_c$ як

$$\sqrt{3}\sigma_i - \sigma_T = 0. \quad (10)$$

Числові результати розглянутої крайової задачі можуть бути отримані лише наближеними методами. Для їх реалізації зазвичай необхідно виконати два етапи:

- дискретизацію системи та вихідних рівнянь;
- побудову ітераційного процесу для вирішення отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Дискретизація крайової задачі була виконана методом скінчених елементів, у якості яких використовувалися восьмивузлові ізопараметричні чотирикутники, наведені в [21].

Ітераційний процес застосовувався для:

- визначення розв'язання задачі із заданою точністю;
- повернення вектора в область, обмежену функцією навантаження.

Він визначається як

$$u^{j+1} = u^j - K_j^{-1} \varepsilon(u^j), \quad (11)$$

де $\varepsilon(u^j)$ – нев'язка в рівнянні, яка в процесі рішення повинна бути меншою за задану величину ε_0 ;

K_j^{-1} – обернена матриця жорсткості, яка обчислювалася з використанням різних модифікацій методу Ньютона-Канторовича [22].

На підставі зазначених вище передумов було розроблено алгоритм рішення розглянутого типу нелінійних крайових задач, який був реалізований у вигляді програмного комплексу в системі Delphi. Розглянемо його застосування до вирішення конкретної задачі за наступних вихідних даних: $h = 0,8$ м; $h_1 = h_2 = 12$ м; $l_1 = l_3 = 0,6$ м; $l_2 = 6$ м. Массив складається з двох ґрунтових шарів, які лежать на скельній основі. Верхній шар $h_2 = 12$ м та засипка мають такі характеристики: $E_{01} = 40$ МПа; $\mu_1 = 0,4$; $c_1 = 0,004$ МПа; $\varphi_1 = 26^\circ$; нижній шар $h = 16$ м визначається механічними параметрами: $E_{02} = 60$ МПа; $\mu_2 = 0,3$; $c_2 = 0,06$ МПа; $\varphi_2 = 30^\circ$. Для бетону стінки: $E = 30000$ МПа; $\mu = 0,2$; $\sigma_p = 1,7$ МПа; $\sigma_c = 17$ МПа.

До системи спочатку прикладається навантаження $q_1 = 0,2$ МПа, потім $q_2 = 1$ МПа і далі $q_3 = 1$ МПа. Навантаження q_2 і q_3 можуть моделювати дію

пришвартованого судна на причал Зазначене навантаження розбивалося на 10 прирощень, з яких 4 припадали на q_1 і по 3 на q_2 та q_3 .

На рис. 2 показана загальна схема розбиття системи на скінчені елементи та її переміщення у збільшеному масштабі після 7-го приросту навантаження, тобто після послідовного прикладання q_1 і q_2 . При цьому враховувалося навантаження від власної ваги засипки та елементів стінки. З рисунка видно, що сумарне переміщення верху стінки від дії q_1 і q_2 відбувався вправо, тобто переважав вплив q_2 . У районі її контакту з верхнім шаром масиву відбувалися переміщення навпаки вліво від осі y , що обумовлено випорем стінки від дії засипки.

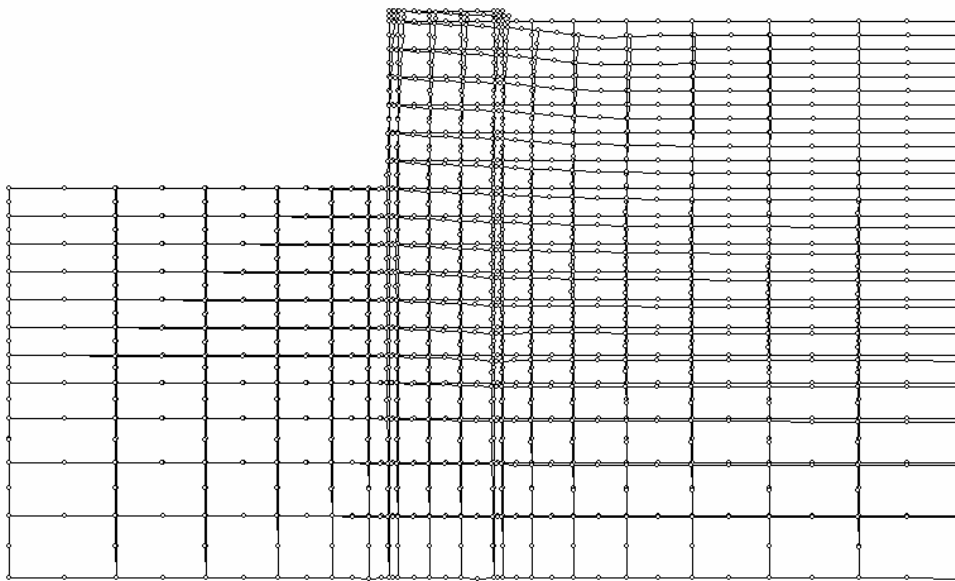
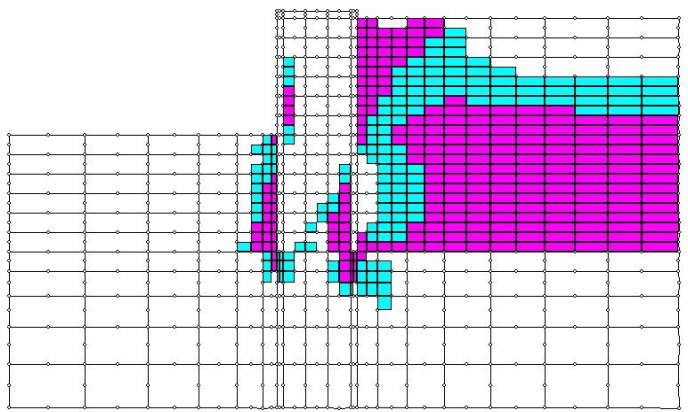
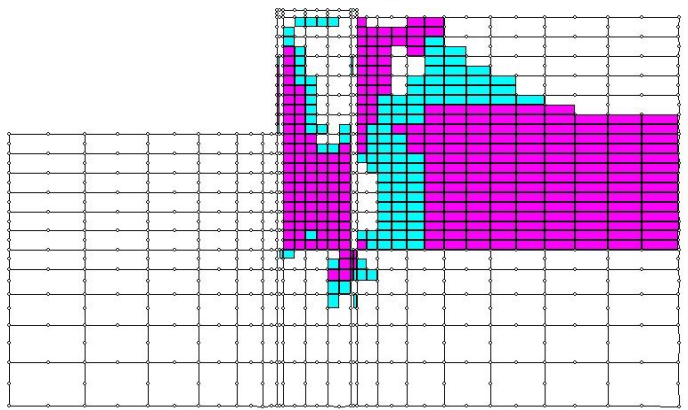


Рис. 2. Загальна схема деформування системи

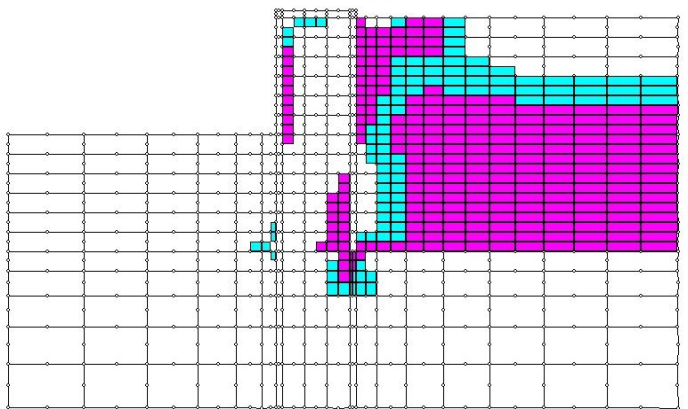
На рис. 3 наведено графіки утворення пластичних зон від сумісної дії власної ваги засипки, елементів стінки і відповідно від прикладеного навантаження q_1 (приріст 4), від q_1 і q_2 . (приріст 7) і від q_1 , q_2 і q_3 (приріст 10). З рисунка видно, що в залежності від поєднань навантажень відбувалося утворення нових зон (активне навантаження), закриття старих зон (розвантаження) та утворення повторних зон (нове активне навантаження). Отже, система випробовувала складне навантаження та деформаційні теорії пластичності в даному випадку не застосовні [17].



Приріст навантаження 4 із 4



Приріст навантаження 7 із 7



Приріст навантаження 10 із 10

Рис. 3. Схеми утворення пластичних зон у системі

На рис. 4 показані графіки горизонтальних переміщень стінки перерізу I-I (див. рис. 1) залежно від наступних сполучень навантажень:

- власна вага та q_1 ;
- власна вага, q_1 та q_2 ;
- власна вага, q_1 , q_2 та q_3 .

Вісь z спрямована від точки перетину верхньої межі першого шару масиву та стінки вгору у напрямку осі y .

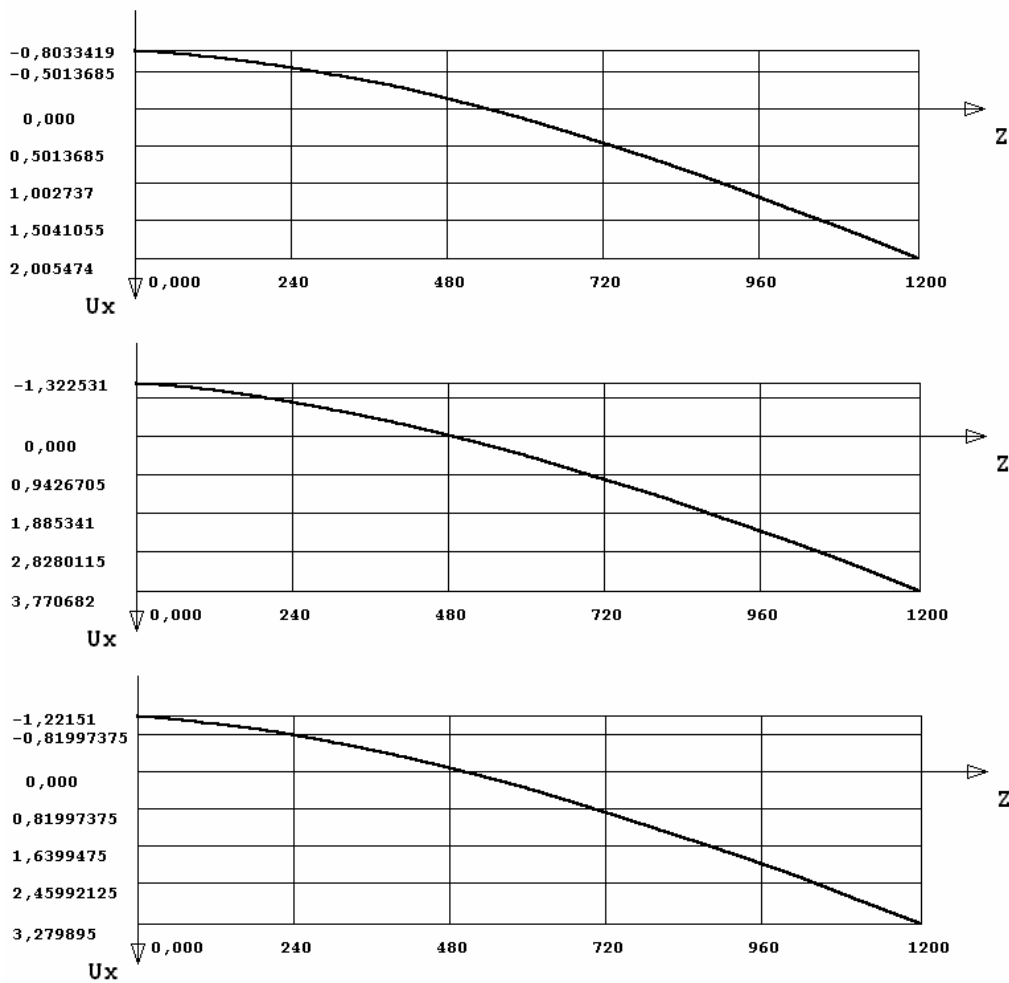


Рис. 4. Горизонтальні переміщення стінки по перерізу I-I

Після дії власної ваги та навантаження q_1 верхня точка стінки ($z = 12$ м) переміщається на 2,005 см, а нижня ($z = 0$) на $-0,803$ см. При додатковому прикладанні q_2 відбувається поворот стінки за годинниковою стрілкою, а при дії q_3 – у зворотному напрямку.

На рис. 5 зображені епюри тисків деформованого середовища на стінку по перерізу II-II від дії тих же навантажень, для яких були побудовані графіки переміщень, зображені на рис. 4. Під номером I показано тиск від 4-го приросту навантаження, II – від 7-го та III – від 10-го приросту. На цьому рисунку під номером IV показана епюра тисків від дії лише власної ваги засипки. Під номером V зображено епюру тисків, побудовану за методом Кулона.

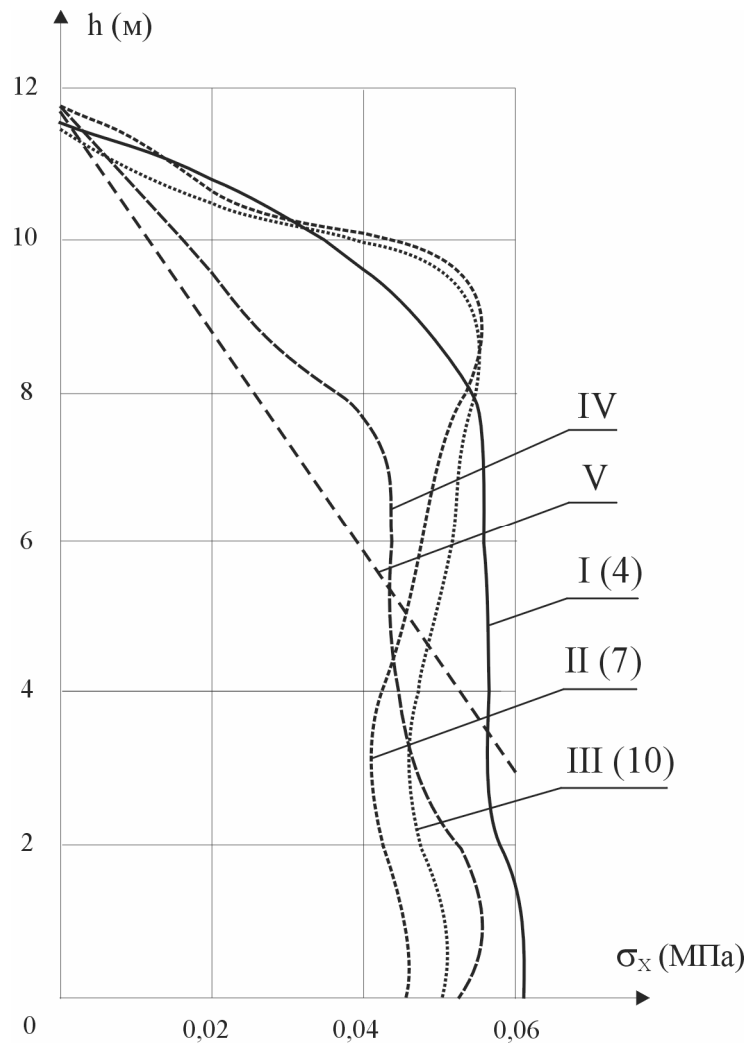


Рис. 5. Епюри бічних тисків на стінку по перерізу II-II

Висновки, які можна зробити на основі розглянутого в роботі прикладу полягають у тому, що підпірна споруда, ґрунтове та водне середовище взаємопов'язані між собою. Зміна в процесі навантаження властивостей одного елемента системи впливає на напружено-деформований стан іншого. Тому лише їхній спільний розрахунок дозволить отримати правильні результати.

Розроблена розширена пружнопластична модель підпірної споруди, яка враховує процес складного навантаження і може включати в себе, як єдину систему, наступні елементи:

- 1) безпосередньо підпірну конструкцію;
- 2) розташовану поруч з нею частину ґрунтового масиву;
- 3) раніше побудовані або проєктовані на цих ґрунтах споруди;
- 4) підземні води.

Така розширена модель дозволяє найбільш точно визначити її напружено-деформований стан системи.

Модель системи, що використовувалась в роботі, дозволила розглянути не тільки навантаження, що змінюються пропорційно до будь-якого параметра, що необхідно для деформаційних теорій пластичності, а й складне навантаження. Це дало змогу врахувати послідовність прикладання навантажень системи у процесі її зведення та експлуатації, що було реалізовано в алгоритмі рішення.

Для більш точного визначення напружено-деформованого стану розглядуваних систем необхідно не тільки враховувати спільну роботу всіх її елементів, а також пружнопластичні властивості матеріалів конструкцій і ґрунтів, та використовувати теорії пластичності з зміцненням, які дають змогу врахувати процес складного навантаження. Моделювання ґрунтового середовища за методом Кулона або теорії граничного напруженого стану не дозволяють визначити деформації, а отже і зміни напруженого стану в процесі навантаження. З аналізу епюр бічних тисків на стінку по перерізу II-II, можна сказати, що епюра, побудована за методом Кулону у верхній половині стінки показала занижені, а у нижній – навпаки завищені результати.

На закінчення можна відзначити, що запропонована методика та програмний комплекс дозволяють проводити розрахунки різних систем, які працюють не лише під впливом статичних, а й динамічних навантажень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуревич В.Б., Даревский В.Э., Самарин В.Ф., Федоров Ю.М. Портовые гидротехнические сооружения / Под ред. В.Б. Гуревича. К.: Будівельник, 1992. 256 с.
2. Стецюк В.И. Пути развития и проектирования портов и портовых гидротехнических сооружений. Порты Украины. 2003. № 04 (41). С. 12-21.

3. ЗАКОН УКРАЇНИ «Про морські порти України». Відомості Верховної Ради України. 2013. № 7. Ст.65.
4. Никеров П.С. Развитие морских портов. К.: Наукова думка, 1984. 208 с.
5. Омельченко Ю.М., Дубровский М.П., Пойзнер М.Б. Некоторые прикладные задачи морской гидротехники. Морской торговый порт Южный. Морская корпорация. Одесса, 1993. 112 с.
6. Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K. The finite element method in structural and continuum mechanics. London, 1967. 268 p.
7. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц / Пер. с англ. К.: Наукова думка, 1968. 241 с.
8. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stif-fnes and Deflection Analysis of Complex Structures. Journal of the Aeronautical Sciences, 1956. Vol.23. Pp. 805-823.
9. Масленников А.М. Метод конечных элементов // Справочник по теории упругости / Под ред. П.М.Варвака, А.Ф.Рябова. К.: Будівельник, 1971. С.239-260.
10. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. К.: Факт, 2007. 394 с.
11. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружения и возможность их анализа. К.: Сталь, 2002. 360с.
12. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Библиотека журнала «Мир геотехники». Выпуск 9. З.: ООО «ИПО «Запорожье», 2009. 400 с.
13. Карпиловский В. С. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD / В.С.Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. К.: СКАД СОФТ, 2007. 609 с.
14. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (методом конечных элементов). К.: Будівельник, 1980. 232 с.
15. Барабаш М.С. Пакеты прикладных программ для автоматизированного проектирования конструкций / М.С. Барабаш, Ю.Д. Гераймович, А.Н. Кекух, М.В. Лазнюк, Е.Б. Стрелецкий / Под ред. А.С. Городецкого. К.: Факт, 2006. 112 с.
16. Морские гидротехнические сооружения на континентальном шельфе / Г.В. Симаков, К.Н. Шхинек и др. К.: Будівельник, 1989. 328 с.
17. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. К.: Наукова думка, 1971. 231 с.
18. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. К.: Наукова думка, 1987. 524 с.
19. Новожилов В.В. Теория упругости. К.: Будівельник, 1958. 370 с.

20. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. К.: Наукова думка, 1974. 316 с.
21. Zienkiewicz O.C. The finite element method. – McGraw – Hill Book Company (UK) Limited. 1986. P. 787.
22. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. К.: Наукова думка, 1975. 558 с.

REFERENCES

1. Gurevich V.B., Darevsky V.E., Samarin V.F., Fedorov Yu.M. Port hydraulic structures. Ed. Gurevich V.B. K.: Budivel'nik, 1992. 256 p.
2. Stetsyuk V.I. Ways of development and design of ports and port hydraulic structures. Ports of Ukraine. 2003. No. 04 (41). pp. 12-21.
3. LAW OF UKRAINE «On the maritime ports of Ukraine». Vidomosti of the Verkhovna Rada of Ukraine. 2013. No. 7. Art. 65.
4. Nikerov P.S. Development of seaports. K.: Naukova Dumka, 1984. 208 p.
5. Omelchenko Yu.M., Dubrovsky M.P., Poizner M.B. Some applied problems of marine hydraulic engineering. Sea trade port Yuzhny. Maritime Corporation. Odessa, 1993. 112 p.
6. Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K. The finite element method in structural and continuum mechanics. London, 1967. 268 rub.
7. Argyris J. Modern achievements in methods of calculation of structures using matrices / Transl. from English K.: Naukova Dumka, 1968. 241 p.
8. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. Journal of the Aeronautical Sciences, 1956. Vol.23. pp. 805–823.
9. Maslennikov A.M. Finite element method // Handbook on the theory of elasticity / Ed. P.M.Varvak and A.F.Ryabov. K.: Budivel'nik, 1971. P.239-260.
10. Gorodetsky A.S., Evzerov I.D. Computer models of structures. K.: Fakt, 2007. 394 p.
11. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Calculation models of structures and the possibility of their analysis. K.: Steel, 2002. 360 p.
12. Klovanich S.F. Finite element method in nonlinear problems of engineering mechanics. Library of the magazine «World of Geotechnics», 9th issue. Z.: LLC «IPO Zaporozhye», 2009. 400 p.
13. Karpilovsky V.S. SCAD Office. Computer complex SCAD / V.S. Karpilovsky, E.Z. Kriksunov, A.A. Malyarenko, A.V. Perelmuter, M.A. Perelmuter. K.: SKAD SOFT, 2007. 609 p.

14. Nemchinov Yu. I. Calculation of spatial structures (by the finite element method). K.: Budivel'nik, 1980. 232 p.
15. Barabash M. S. Packages of applied programs for automated design of structures / M.S. Barabash, Yu.D. Geraimovich, A.N. Kekukh, M.V. Laznyuk, E.B. Streletsky. Gorodetsky Ed. A.S. K.: Fakt, 2006. 112 p.
16. Marine hydraulic structures on the continental shelf / G.V. Simakov, K.N. Shkhinek et al. K.: Budivel'nik, 1989. 328 p.
17. Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. Theory of a hardening plastic body. K.: Naukova Dumka, 1971. 231 p.
18. Washizu K. Variational methods in the theory of elasticity and plasticity. – K.: Naukova Dumka, 1987. 524 p.
19. Novozhilov V.V. Theory of elasticity. K.: Budivel'nik, 1958. 370 p.
20. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete. K.: Naukova Dumka, 1974. 316 p.
21. Zienkiewicz O.C. The finite element method. – McGraw – Hill Book Company (UK) Limited. 1986. P. 787.
22. Ortega J., Reinboldt V. Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many unknowns. K.: Naukova Dumka, 1975. 558 p.

Стаття надійшла до редакції 12.12.2024

Посилання на статтю: Гришин А.В., Олейніков В.В. Сумісний розрахунок підпірної споруди і деформуємого середовища при складному статичному навантаженні // *Вісник Одеського національного морського університету: Зб. наук. праць*, 2025. № 1 (75). С. 7-20. DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-7-20.

Article received 12.12.2024

Reference a journal artic: Grishin A., Олейніков В.В. Comprehensive calculation of a retaining structure and a deformable environment under complex static loading // *Herald of the Odesa National Maritime University: Coll. scient. works*, 2025. № 1 (75). P. 7-20. DOI 10.47049/2226-1893-2025-1-7-20.